MĘSKIE FANTAZJE

ALBO
PIWO, NOGI I INNE EKSTREMA

W Hamburgu emocje sięgają zenitu: kiedy w tym roku zacznie się wiosna? W najlepszym przypadku można liczyć na trochę cieplejsze powietrze w kwietniu i maju. Od razu po Elbchaussee kursują setki kabrioletów – od jednego czerwonego światła do następnego – wszystkie w poszukiwaniu wolnego miejsca do parkowania między błoniami Altonaer Balkon a Blankeneser Hirschpark.
Świetne obroty będzie z pewnością robiła „Strandperle” – „Perła plaży”, buda z niewielką ofertą jedzenia i picia, uważana jednak za miejsce kultowe i centrum flirtów. Młodzież koczuje na szerokiej na pięć ręczników plaży miedzy resztkami węgla z „palenia Judasza” [popularny zwyczaj palenia stosów z okazji Wielkiej Nocy – przyp. tłum.] a psimi nieczystościami. Nawet leżące przy plaży miejskie kluby nie mogą równać się popularnością z „Perłą”. Najpóźniej za drugim razem większość gości rozumie już lokalny koloryt i przychodzi na plażę z własną matą pod pachą.
Kolja i Jens, dwaj przyjaciele, leżą między redaktorkami magazynów dla kobiet w okularach w typie lat 60. a dynamicznymi specjalistami od IT, którzy wyłączyli swoje telefony. Sałatkę ziemniaczaną i kiełbaski kupili w „Perle”, półlitrowe puszki piwa po korzystnej cenie w supermarkecie. Fale Łaby rozbijają się o te puszki, chłodząc znajdującą się w nich ciecz. Na wąskiej betonowej ścieżce pierwsze

młode panie pierwszy raz w tym sezonie pokazują nogi: ogolone, opalone, wytrenowane.
Trochę tym zdekoncentrowany Kolja bierze łyk piwa i odstawia puszkę na piasek. Ta się przewraca, cenny płyn wsiąka w piasek Łaby.
„Cholera", przeklina Kolja i ratuje resztę. „Że też te puszki nigdy nie chcą ustać na piasku".
„To dlatego, że ich punkt ciężkości znajduje się dość wysoko, mniej więcej w połowie". W słowach Jensa przebija się kompetencja studenta drugiego roku fizyki. „Przynajmniej dopóki jest pusta", dodaje i wkręca swoją puszkę mocno w piasek.
„Punkt ciężkości zawsze jest w połowie", mówi Kolja, który jako przyszły germanista próbuje uruchomić całą swoją wiedzę. „Również kiedy puszka jest pusta, to jest w połowie. Wtedy jeszcze łatwiej się przewraca". Środkowym palcem pstryka oklejoną piaskiem puszkę, tak aby wróciła do pionu.
„Kiedy jest pusta", przyznaje Jens z namysłem, „to masz rację. Ale zanim będzie pusta, to jej punkt ciężkości leży niżej. Kiedy jest, dajmy na to, do połowy pełna, to punkt ciężkości piwa leży w jednej czwartej wysokości puszki. To właściwie wystarczy, żeby puszka stała stabilnie, bo puszka jest w stosunku do piwa dosyć lekka. Dlatego właśnie ich wspólny punkt ciężkości leży niewiele wyżej". Jens uderza przewróconą puszkę, pozwala jej przechylać się w tę i z powrotem, światło słońca załamuje się na złotej farbie.
Kolja płaską dłonią wygładza piasek i palcem rysuje krzywą w kształcie litery U. „Czyli na początku, kiedy puszka jest pełna, punkt ciężkości jest w połowie. Kiedy poziom piwa się obniża, obniża się też punkt ciężkości. Jednak kiedy puszka jest pusta, to jej punkt ciężkości znowu jest

w połowie. Czyli musi być taki moment, kiedy punkt ciężkości jest najniżej, a potem znów zaczyna się podwyższać".

„Sprawa jest dość jasna", potwierdza Jens. „Na początku jest dużo piwa i stosunkowo mało puszki. Z każdym łykiem zmniejsza się masa piwa, a metalowa puszka i jej wysoki punkt ciężkości nabiera stosunkowo dosłownie coraz większej wagi".

„W takim razie mamy głupie i mądre strategie picia", odpowiada Kolja podniecony. „Głupią mogliśmy już zaobserwować", mówi na to złośliwie Jens. „Należy przewrócić puszkę".

„No już dobrze. Czyli idealna strategia jest taka: otwierasz puszkę…" Kolja ilustruje tę czynność przy użyciu pełnej puszki. „Pijesz i pijesz, nie odstawiasz puszki, dopóki nie osiągniesz najniższego punktu ciężkości". Kolja spogląda na przyjaciela, zachęcając go do stuknięcia się. „Wtedy stoi najstabilniej". Odstawia puszkę. „Następnym łykiem trzeba ją opróżnić, czyli doprowadzić do samego kresu jej egzystencji". Blond głowa na skos od Kolji odwraca się tak, że Kolja widzi lewe ucho. Słucha go. Wzbudził jej zainteresowanie. Jej towarzysz ma gęstą sierść na całym ciele i sprawia wrażenie przekupnego. Kolja zastanwia się, ile kiełbasek z „Perły" trzeba by zamówić, żeby przeciągnąć pieska na swoją stronę.

„Czego nam brakuje?", pyta w tym momencie Jens. „Idealnego poziomu piwa, innymi słowy: najniższego punktu twojej krzywej, którą nieco zbyt krzywo narysowałeś na tym piasku. Jest to tak zwany przebieg zmienności funkcji, prawdziwy horror dla licealistów. A przy tym znalezienie punktu przegięcia nie jest wcale takie trudne".

„Obejdzie się", broni się Kolja. „Chyba że poprosimy którąś z tych godnych pożałowania samotnych pań, żeby oceniła, gdzie jest punkt przegięcia".

„Wystarczy wymówić słowa »punkt przegięcia«, a padną ci w ramiona", odpowiada Jens.
„Zauważyłeś, że ta blondynka przeszła już tędy czwarty raz? To nogi! I to od razu dwie!"
„Dwie proste równoległe, które przecinają się w nieskończoności", medytuje Jens.
„Trzeba by się zbliżyć", odpowiada Kolja, „jak dziennikarz śledczy. Nieprzekupny i chwytliwy".
„Ale nie nazbyt blisko".
„Dlaczego nie?"
„Żeby zobaczyć możliwie dużo z tych nóg, kąt, pod którym się na nie spogląda, musi być jak największy".
„I piękny".
„Nie ma pięknych albo brzydkich kątów".
Jens bierze łyk piwa, a ponieważ nie chce ryzykować, wypija jeszcze jeden. Potem mówi: „Weźmy zatem kobietę prawie metr osiemdziesiąt. Bardzo blond, bardzo zgrabną, bardzo dumną, długość nóg ponad metr dziesięć. Nasz wzrok z zadowoleniem spoczywa na tych nogach".
„I na nieskończoności".
„Pomińmy ten temat. Wspaniała kobieta, wspaniałe nogi. I dwie pary oczu, które chcą patrzeć. Kąt musi być duży. Jeśli jesteśmy zbyt daleko, staje się zbyt mały, ponieważ dane nogi zajmują wtedy tylko niewielki kąt naszego pola widzenia".
„Trzeba więc podejść bliżej, wszystko w służbie prawdy", odpowiada Kolja rozmarzony.
„Ale nie za blisko, ponieważ wówczas kąt znów stanie się zbyt mały".
„To jest antymęska matematyka".
„Oczywiście mówię o sytuacji, w której zbliżamy się do kobiecych nóg, idąc prosto, a nie klęcząc i śliniąc się na podłodze. W takiej sytuacji musiałbyś w którymś momencie

spojrzeć w górę, a wtedy nogi znów zajęłyby tylko niewielką część pola widzenia".
„I to prawda", zgadza się Kolja. „Mały kąt, duży kąt, mały kąt – to znowu brzmi jak jakieś zadanie na przebieg zmienności".
„Gdybym trochę się wysilił, rzeczywiście mógłbym obliczyć optymalną odległość".
„No to ty licz, a ja odwrócę ich uwagę". Rzeczowo przyglądają się dwóm niekończącym się nogom, które poruszają się po betonowej ścieżce w kierunku Blankenese, gdzie mieszka nieskończoność.

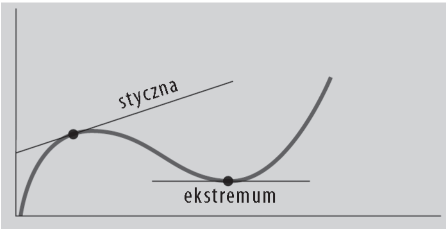
EKSTREMALNE ZADANIA, KTÓRE WYMAGAJĄ ODWAGI

Zadania na obliczanie ekstremów, takie jak problem puszki z piwem czy kąta patrzenia na nogi, należą do działu analizy matematycznej, a konkretnie rachunku różniczkowego. To obszar matematyki, przy którym wielu uczniów szkół średnich przestaje ostatecznie cokolwiek rozumieć albo nawet zaczyna wątpić we własny rozum – jest tam mowa o nieskończenie małych liczbach, o granicach funkcji, wszystko to dość abstrakcyjne koncepcje, a prowadzenie na nich obliczeń nie jest bynajmniej proste.
Dochodzi do tego ten problem, że stosowane tu pojęcia mogą być trochę mylące. Na przykład „przebieg zmienności funkcji"[1] nie ma nic wspólnego z demokratycznymi debatami. Chodzi raczej o to, żeby wykryć cechy funkcji matematycznej: czy jest „ciągła" (tzn. czy można ją narysować bez odrywania ołówka od kartki), czy może różniczkowalna (a więc płaska i bez kątów)? Czy ma lokalne maksima (czyli „górki") i minima („doliny")? Jak silne jest

---

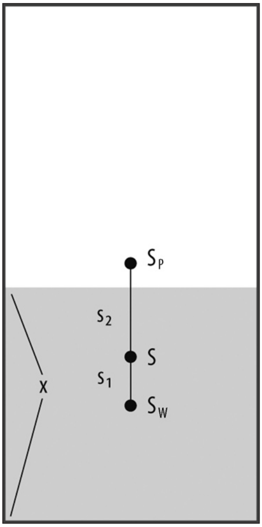
1 *Kurvendiskussion* (niem.) – dosł.: dyskusja o krzywej (przyp. tłum.).

jej odchylenie? „Dyskusja” taka nie dotyczy poglądów, jej wynik jest albo prawdziwy, albo fałszywy.
Kiedy ktoś szuka maksimów i minimów, to bada przebieg zmienności. A najważniejsze w wyniku takiej analizy jest to, że można zdefiniować wzrost funkcji nie tylko dla prostych, lecz także „nachylenie aktualne” dla każdego punktu krzywej. Jest to zresztą zgodne z naszym codziennym doświadczeniem: kiedy idziemy pod górę, to mamy poczucie wznoszenia się w każdym momencie, nieważne, czy droga jest bardziej, czy mniej stroma.
Matematycznie nachylenie krzywej w danym punkcie definiuje się jako nachylenie stycznej, którą przykłada się do tego punktu. A lokalne ekstrema znajduje się w ten sposób, że szuka się punktu, w którym nachylenie wynosi zero. I to właściwie prawie wszystko.



Jednak niestety tylko prawie. Bo kiedy każdemu punktowi krzywej przyporządkuje się jego nachylenie, to znów otrzymuje się funkcję, którą nazywa się „pochodną”. Znaleźć ją nie jest tak łatwo, może z kilkoma wyjątkami: na przykład pochodna prostej jest stała, ponieważ nachylenie w każdym punkcie jest takie samo. Pochodna funkcji stałej jest równa zero, ponieważ obraz takiej funkcji to pozioma prosta. W praktyce pochodne wszystkich innych możliwych funkcji można sprawdzić w odpowiednich tabelach (np. w Internecie), co znacznie ułatwia liczenie za ich pomocą.

Wróćmy jednak do Kolji i Jensa: przy jakiej ilości piwa punkt ciężkości puszki leży najniżej? Ponieważ puszka jest okrągła, można ograniczyć się do przekroju podłużnego, czyli do prostokąta. Punkt ciężkości *C* pustej puszki P (*SP*) leży dokładnie w połowie dużego prostokąta, punkt ciężkości piwa (S*W*) – w środku mniejszego, w zależności od wysokości poziomu piwa *x*. Jeśli przyjmiemy wysokość puszki za jednostkę miary, to punkty ciężkości *SP* i S*W* leżą w 1/2 i 1/*x*; *x* wybrałem tu celowo, ponieważ ilość piwa jest jedyną zmienną w tym zadaniu, wszystkie inne wartości są stałe.



Ale gdzie dokładnie leży punkt ciężkości całej puszki, łącznie z piwem? Można by powiedzieć: dokładnie w połowie między dwoma punktami ciężkości – ale piwo jest jednak wyraźnie cięższe niż puszka. Zamiast tego trzeba przyswoić sobie wiedzę, którą wykorzystują na przykład astronomowie, gdy chcą obliczyć punkt ciężkości systemu składającego się z dwóch gwiazd: wspólny punkt ciężkości takiego system leży na linii między poszczególnymi punktami ciężkości, dzieląc ten odcinek na dwa w stosunku równym stosunkowi obu mas – w związku z czym leży bliżej cięższej masy. Jeśli części systemu nazwiemy s_1 i *s2*, to zastosowanie ma równanie

$$\frac{s_1}{s_1 + s_2} = \frac{masa_{puszki}}{masa_{piwa} + masa_{puszki}}$$

Dla puszki możemy przyjąć masę 25 g, piwo ma mniej więcej gęstość wody, dlatego
½ l piwa będzie ważyła 500 g, w przypadku puszki częściowo opróżnionej jest to *x* pomnożony przez 500 g. Wyrażenie $s_1 + s_2$ to dokładnie różnica między *SP* a *SW* , czyli 1/2 – *x*/2. A zatem

$$\frac{s_1}{\frac{1}{2} - \frac{x}{2}} = \frac{25}{500x + 25}$$

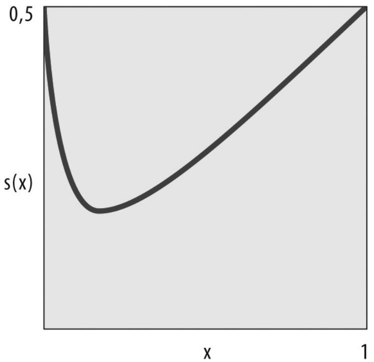
Równanie to ze względu na s_1 rozwiązujemy następująco:

$$s_1 = \frac{25}{500x + 25} \cdot \frac{1 - x}{2} = \frac{25 - 25x}{1000x + 50} = \frac{1 - x}{40x + 2}$$

Aby otrzymać wysokość punktu ciężkości, do odcinka s_1 trzeba dodać jeszcze wysokość punktu ciężkości piwa, tj. *x*/2:

$$s(x) = \frac{x}{2} + \frac{1 - x}{40x + 2} = \frac{x(20x + 1) + 1 - x}{40x + 2} = \frac{20x^2 + 1}{40x + 2}$$

Teraz jest tam napisane $s(x)$, żeby było jasne, że położenie punktu ciężkości to funkcja poziomu piwa *x*. Funkcję tę można narysować, wygląda ona następująco:



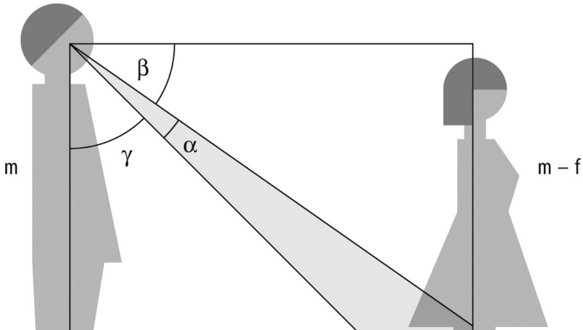
Widać wyraźnie, że istnieje jakieś minimum tej krzywej, położone bliżej pustej niż pełnej puszki.

Ale gdzie dokładnie leży ten punkt? W tym celu trzeba obliczyć nachylenie funkcji *s*. Na rysunku widać, że wartość nachylenia najpierw będzie negatywna – krzywa się obniża, a potem pozytywna – wzrasta. Najniższa wartość jest tam, gdzie nachylenie wynosi 0. Dokładne obliczenia można znaleźć na końcu tego rozdziału, zapisane małym drukiem (s.), ich wynik zaś jest następujący: punkt ciężkości puszki jest najniżej wtedy, gdy puszka jest napełniona w nieco mniej niż jednej piątej. Kolja musiałby więc wypić ponad 80% zawartości, aby móc odstawić puszkę. Oprócz tego łatwo można sobie uświadomić, że punkt ciężkości leży dokładnie na powierzchni piwa!

PIĘKNO DLA ZUCHWAŁYCH A zatem problem piwa rozwiązaliśmy. Przejdźmy teraz do sprawy pięknych nóg. Jednak wyliczenie najlepszego kąta widzenia wymaga jeszcze więcej wysiłku niż przy piwie. Dla takich nóg chyba jednak warto.

Również tu szukamy ekstremów – w tym wypadku największego kąta, pod jakim można oglądać nogi idącej przed nami damy. Zacznijmy znowu od rysunku: męż-

czyzna, którego oczy znajdują się na wysokości m ponad powierzchnią ziemi, patrzy na kobietę, która pokazuje f metrów nóg. Odległość między nimi wynosi x metrów – również tu wartość x została wybrana celowo, ponieważ jest to ta zmienna, którą trzeba obliczyć.
Szukamy kąta α. Jednak na początku wiemy o nim dość mało: należy do trójkąta, którego tylko jeden bok jest znany, a oprócz tego trójkąt ten wygląda na dość nieregularny. W geometrii do rozwiązania często prowadzi znalezienie kąta prostego – tak jest i tutaj. Łatwiej obliczyć dwa inne kąty, mianowicie β i γ. Są one częściami trójkąta, z którego dwa boki są znane, a dodatkowo leżą pod kątem prostym; α znajdziemy wówczas, gdy od 90° odejmiemy β i γ.



Aby z boków trójkąta obliczyć kąty, trzeba zastosować budzące przerażenie funkcje trygonometryczne, takie jak sinus, cosinus czy tangens, a także ich odwrotności, zapisywane ze słówkiem „arcus". Jednak nie ma się czego bać – tutaj zastosujemy tylko podstawowe definicje tych funkcji, resztę można sobie doczytać albo użyć kalkulatora.

Kąt γ jest częścią trójkąta prostokątnego, dla którego znane są długości boków x i m, a więc obu przyprostokątnych trójkąta. Iloraz x/m jest nazywany także tangensem γ, w skrócie tg(γ). Tangens jest funkcją, która danemu kątowi przypisuje ten właśnie iloraz. Jeśli ktoś chciałby wykonać działanie odwrotne, czyli określić kąt z ilorazu, to musi zastosować funkcję odwrotną do tangensu, czyli arcus tangens (arctg). W ten sposób powstaje równanie

$$\gamma = \arctan\left(\frac{x}{m}\right)$$

… co oznacza nic innego, jak: oblicz ułamek w nawiasie i sprawdź, który kąt ma taką wartość tangensu. Czyli pół biedy. Podobnie uzyskuje się β dla wartości

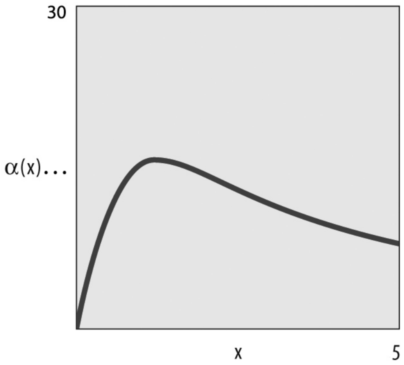
$$\beta = \arctan\left(\frac{m-f}{x}\right)$$

A zatem poszukiwany kąt to po prostu różnica między β a γ

$$\alpha(x) = 90 - \arctan\left(\frac{m-f}{x}\right) - \arctan\left(\frac{x}{m}\right)$$

Ten x w nawiasie ma znów uświadamiać, że chodzi o funkcję zależną od wartości x! Dla wartości $m = 1{,}7$ i $f = 0{,}7$ równanie to przyjmuje postać

$$\alpha(x) = 90 - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \arctan\left(\frac{x}{1{,}7}\right)$$



Wykres ma piękne maksimum i od razu widać, że mężczyzna musi nieźle się zbliżyć do obserwowanej damy. Aby dokładnie określić wartość tego maksimum, znów trzeba wyprowadzić funkcję i sprawdzić, kiedy ta pochodna (a więc nachylenie) jest równa zero. Obliczenia można znaleźć w części pisanej małym drukiem! A rozwiązanie wygląda tak:

Aby patrzeć na damę pod optymalnym kątem, mężczyzna musi podążać za nią w odległości równej pierwiastkowi z iloczynu wysokości jego wzroku i wysokości wzroku ponad rąbkiem jej sukienki. Dla przyjętych przykładowo wartości $m = 1{,}7$ i $f = 0{,}7$ wartość ta wynosi 1,30 m. Przy takiej odległości „ofiara" poczułaby się już z pewnością molestowana. A wymówka w stylu: „Chciałem tylko obejrzeć sobie pani nogi pod optymalnym kątem" zapewne tylko utwierdziłaby ją w tym odczuciu.

MAŁYM DRUCZKIEM Funkcja piwna, dla której poszukujemy minimum, ma postać

$$s(x) = \frac{20x^2 + 1}{40x + 2}$$

Jak obliczyć nachylenie tej jednak dość skomplikowanej funkcji $s(x)$? Wartość s składa się z wielu funkcji. Dla sum pochodne (a więc nachylenie) można łatwo obliczyć, tworzy się je po prostu dla każdego składnika. Jednak s jest ułamkiem, co powoduje konieczność zastosowania bardziej skomplikowanego prawa, które można znaleźć wśród reguł tworzenia pochodnych. Jeśli jakaś funkcja jest ułamkiem dwóch innych funkcji f i g , to pochodną oblicza się w sposób następujący:

$$s'(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}$$

Prim przy funkcji oznacza, że mamy do czynienia z pochodną.
W tym przypadku $f(x) = 20 \cdot x^2 + 1$ oraz $g(x) = 40x + 2$. Teraz już wystarczy wiedzieć, że pochodna funkcji kwadratowej x^2 wynosi $2x$. A zatem

$$f'(x) = 40x$$
$$g'(x) = 40$$

Po podstawieniu wszystkich wartości uzyskujemy następujący ułamek:

$$s'(x) = \frac{40x(40x+2) - 40(20x^2+1)}{(40x+2)^2}$$
$$= \frac{1600x^2 + 80x - 800x^2 - 40}{1600x^2 + 160x + 4}$$

Po uporządkowaniu wszystkiego i skróceniu przez 4 otrzymujemy

$$s'(x) = \frac{200x^2 + 20x - 10}{400x^2 + 40x + 1}$$

Dla tej funkcji interesuje nas tylko, kiedy jej wartość wynosi 0. Dzieje się tak dokładnie wtedy, gdy licznik nad kreską ułamkową wynosi zero (mianownik wcale nie). A więc

$$200x^2 + 20x - 10 = 0$$

… lub inaczej, po podzieleniu przez 200

$$x^2 + \frac{1}{10}x - \frac{1}{20} = 0$$

Jest to równanie kwadratowe. Rozwiązuje się je przy użyciu wzoru ze s. …

$$x_{1,2} = -\frac{1}{20} - \sqrt{\frac{1}{400} + \frac{1}{20}} = -\frac{1}{20} - \sqrt{\frac{21}{400}} = \frac{-1 - \sqrt{21}}{20}$$

Równania kwadratowe mają dwa rozwiązania, ale jedno z nich jest wartością ujemną, która dla nas nie ma znaczenia, ponieważ w puszce nie może być ujemnej ilości piwa; wynika z tego, że rozwiązanie naszego problemu jest jednoznaczne

$$x_{\min} = \frac{\sqrt{21} - 1}{20} \gg \frac{3{,}58}{20} = 0{,}179$$

Rozwiązanie problemu „nóg": poszukujemy maksimum dla funkcji

$$\alpha(x) = 90 - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\arctan\left(\frac{x}{1{,}7}\right)$$

Pochodną arcus tangensu można znaleźć w tabeli, jest to

$$\frac{1}{1 + x^2}$$

Ale jak wyprowadzić

$$\arctan\left(\frac{x}{1{,}7}\right)$$

Jest to funkcja „zagnieżdżona”; dla takich funkcji istnieje specjalna zasada obliczania pochodnych: jeśli $g(x)$ i $h(x)$ są dowolnymi funkcjami, to pochodna funkcji zagnieżdżonej

$$g(h(x))' = h'(x) \quad g'(h(x))$$

Czyli: należy wyprowadzić funkcję „wewnętrzną” i pomnożyć ją przez pochodną funkcji „zewnętrznej”.
Mamy więc już wszystkie dane niezbędne do obliczeń – żeby tylko nie popełnić teraz błędu…

$$\alpha'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} - \frac{1}{1{,}7} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{1{,}7}\right)^2}$$

Na razie wygląda to dość szpetnie, ale jeśli trochę się postaramy i przemnożymy wszystkie ułamki z nawiasów, to otrzymamy

$$\alpha'(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1{,}7}{x^2+1{,}7^2} = \frac{(x^2+1{,}7^2)-1{,}7(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+1{,}7^2)}$$

Sprawa wydaje się coraz bardziej skomplikowana, ale już widać światełko w tunelu: interesuje nas przecież tylko wartość, przy której nad kreską ułamkową stoi zero. A więc

$$(x^2 + 1{,}7^2) - 1{,}7(x^2 + 1) = 0$$
$$x^2(1 - 1{,}7) - 1{,}7(1 - 1{,}7) = 0$$

Dzielimy obie strony przez (1 – 1,7) i przenosimy:

$$x^2 = 1{,}7$$

$$x = \sqrt{1{,}7} \approx 1{,}3$$

„OBLICZANKA" David Hasselhoff leży na plaży w Malibu i widzi Pamelę Anderson wołającą o pomoc z morza. Wszystko rozgrywa się w ciągu kilku sekund. On znajduje się w odległości 20 metrów od wody, ona w odległości 20 metrów od brzegu. Jednak wzdłuż linii brzegowej dzieli ich jeszcze dodatkowych 50 metrów. Nasz wysportowany ratownik biega po piasku z prędkością 5 metrów na sekundę, pływa z prędkością 2 metrów na sekundę. Mógłby albo (1) podbiec do niej możliwie prostą drogą, a następnie zacząć płynąć, albo (2) najpierw dobiec do takiego punktu plaży, od którego będzie miał najkrótszy odcinek do przepłynięcia, albo coś pomiędzy. Która strategia będzie najlepsza, aby uratować Pamelę?

Rozwiązanie na s. ….